

## 第6章

# 数値計算法

一般に、雲を解像するモデルは、大気の運動方程式、熱力学方程式から導かれる温位の式、連続の式と状態方程式から導かれる気圧の式を、水蒸気および水物質の方程式と連立して、適当な初期値・境界値のもとに時間積分するものである。

*CReSS* についても2章「基本方程式の定式化」に示した、運動方程式、温位偏差および気圧偏差の方程式、水蒸気および水物質の方程式を、空間と時間について、有限差分法を用いて数値積分している。これらの方程式系をどのように離散化し数値積分するかについてはこれまで多くの研究があり、様々な計算法が開発されてきている。

ここでは、*CReSS* で用いられている数値計算法について、格子点の構造、離散化の方法、時間積分の方法などを説明する。

## 6.1 基礎方程式系の離散化

### 6.1.1 数値解法の概要

雲を解像するモデルの解法には、従属変数の選択から始まり、時間積分の方法まで様々なものがあるが、*CReSS* で用いられている数値解法の概要を以下にまとめる。

- 基本方程式は、運動方程式、温位偏差の式、気温偏差の式、水蒸気および水物質の式である。
- 従属変数は、速度の 3 成分  $u, v, w$ 、温位偏差  $\theta'$ 、気圧偏差  $p'$ 、水蒸気混合比および水物質に関する量（混合比や数密度など）である。
- 地形を取り入れるため、地形に沿う曲線座標系で定式化された基本方程式を用いている。
- 従属変数の空間微分は差分法を用いており、水平には Arakawa C タイプ、鉛直には Lorenz タイプのスタaggerドの格子配置を用いている。
- 圧縮方程式系を用いるので、音波が解として含まれる。このため時間積分には音波に関する項を短い時間間隔  $\Delta\tau$  で、それ以外の項を長い時間間隔  $\Delta t$  で時間積分するモード別時間分割法を用いている。
- 長い時間間隔の時間積分は、リープフロッグスキームに Asselin のタイムフィルターを併用している。
- 短い時間間隔の時間積分は、陽解法の forward-backward スキーム、または、鉛直についてのみ陰解法の Crank-Nicolson スキームを用いる。
- 短い時間間隔の陽解法においては発散項を加えることで音波を抑えている。

本章においては、**地図係数が含まれない基礎方程式系**の数値解法について述べる。このとき、地形に沿う座標系の場合には  $\xi = x, \eta = y$  であるので、以下、本章では  $\xi, \eta$  を  $x, y$  と表記する。なお、地図係数  $m$  はスカラー量と同じ格子点に定義される（次節参照）。数値解法において現れる平均化・微分操作などは、それらスカラー量の操作法で十分理解できる。

### 6.1.2 モデル格子と変数の配置

*CReSS* では空間の表現を格子点法を用いているので、空間微分は差分法を用いて表現される。ここでは *CReSS* で用いられるモデル格子の構造と、変数の配置についてまとめる。

格子点の構造と変数などの配置は、図 6.1 に示されているように、水平・鉛直ともにスタaggerド<sup>1</sup>に配置されており、水平方向の配置は Arakawa C グリッドを、鉛直には Lorenz グリッドを用いている。この場合、すべてのスカラー量（気圧偏差、温位偏差、水蒸気混合比、および雲・降水の物理量）は格子ボックスの中心に配置される<sup>2</sup>。また、ベクトル量（ $x, y, z$  方向の速度成分  $u, v, w$ ）は中心から半格子ずれて配置されるが、水平成分  $u, v$  は、鉛直方向にはスカラーと同じレベルで、 $u$  を  $x$  方向に半格子、 $v$  を  $y$  方向に半格子ずらしてボックス側面に配置する。鉛直成分  $w$  は、水平方向にはスカラーと同じ位置に、鉛直方向には半格子ずらして、ボックスの下面と上面に配置される。

<sup>1</sup>スタaggerド (staggered) というのは、幅などを互い違いにする、ずらすなどの意味で、スタaggerド格子というのは「食い違い格子」などと訳されたりすることがある。しかしながら、「スタaggerド格子 (または、スタaggerド格子)」というのが日本語として定着しているのが一般的である。スタaggerド格子というのはモデル変数をずらして互い違いに配置する方法で、その配置の方法には様々なものがある。

<sup>2</sup>Lorenz grid では温位 (温度) と気圧が同じレベルに配置されるが、Charney Phillips grid では温位 (温度) が、鉛直方向に半格子ずれて、鉛直速度と同じ位置に配置される。この点がこれらの格子配置の異なる点である。

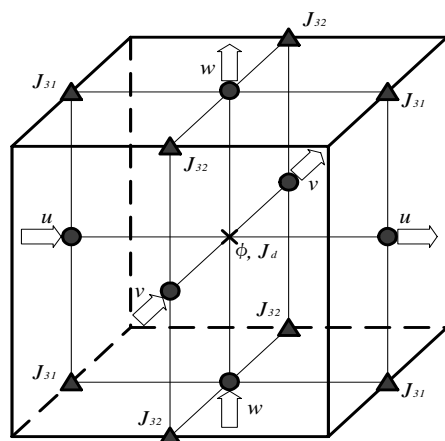


図 6.1. ある格子における変数の配置図。

さらに、**CR<sub>e</sub>SS** では地形に沿う座標系を用いているので、座標変換に伴うヤコビアン  $G^{\frac{1}{2}}$  と座標変換の計量テンソルの成分のうちゼロまたは1でないもの、つまり、 $J_{31}, J_{32}, J_d (= G^{\frac{1}{2}})$  については、 $G^{\frac{1}{2}} (= J_d)$  はスカラー点で、 $J_{31}$  はスカラー点から  $x$  方向に半格子ずれた  $u$  の定義点からさらに  $z$  方向に半格子ずれた位置で、 $J_{32}$  はスカラー点から  $y$  方向に半格子ずれた  $v$  の定義点からさらに  $z$  方向に半格子ずれた位置で評価される。

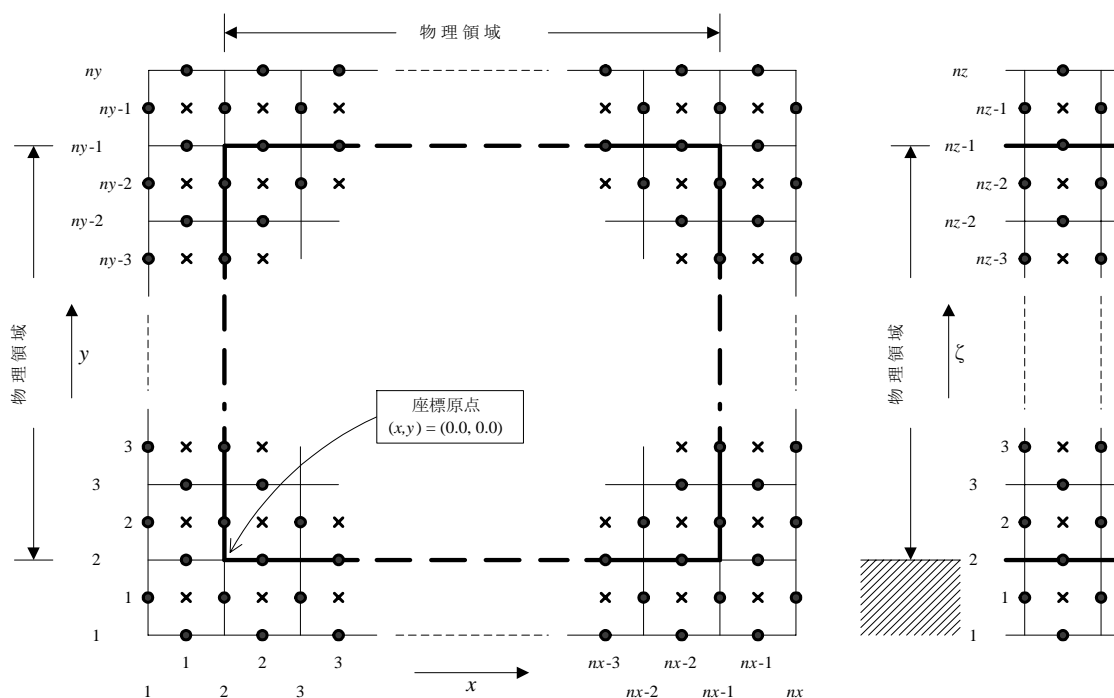


図 6.2. 全計算領域における変数の配置図 (●は速度の定義点、×はスカラー量の定義点を表す)。

座標  $x, y, \zeta$  についても、スタッガードに配置されており、その配置は図 6.1 に示されているとおりである。これらはベクトル量の位置に対応している。物理領域は、図 6.2 に示されるとおり、外縁 1 格子を除いた太線内の領域である。このため、2次元の計算の場合には、次元のない方向に 4 格子取らなければならない。

### 6.1.3 有限差分法による基本方程式の離散化

一般に、雲を解像するようなモデルの基本方程式は近似のない弾性系の方程式を用いるので、大気中に存在するすべての波を表現する。大気中の波は、位相速度または振動数で大別すると、音波、内部重力波、およびロスビー波に分けられ、波の位相速度はこの順に小さくなる。音波は気象学的に通常は興味のない波であるが、最も早い位相速度を持っている。雲およびメソ気象に関わるものとして内部重力波とロスビー波が重要であるが<sup>3</sup>、弾性系のモデルでは音波が含まれるため、これについて特別の扱いをしなければならない。すなわち、一般の流体の数値積分と同様に気象のモデルにおいてもその時間積分をすべて陽解法で行なおうとすると、最も位相速度の早い音波の速度が CFL 条件を規定し、時間間隔が非常に小さくなってしまふ。しかしながら、気象学的に重要な内部重力波やロスビー波には関わる部分はそれに比べてはるかにゆっくり変化するので、もっと長い時間間隔で十分である。

この音波による時間間隔が小さくなる制約を回避するために、いくつかの数値計算の方法がある<sup>4</sup>。よく知られているものとして、

- HI-VI 法** 音波に関する項を陰解法で解き、それ以外の項を陽解法で解く方法。これは、セミ・インプリシット法とよばれる<sup>5</sup>。
- HE-VE 法** 音波に関する項とそれ以外の項を別の時間間隔で全て陽解法で解く方法。これは、モード別時間分割法とよばれ、Klemp and Wilhelmson (1978) 以来、しばしば用いられている。
- HE-VI 法** モード別時間分割法で、音波に関する項について鉛直方向にのみ陰解法で解く方法。

などがある。ここに現れた、モード別時間分割法概念図を図 6.3 に示す。

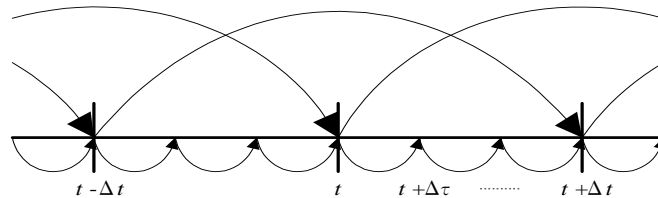


図 6.3. モード別時間分割法概念図。

さて、HI-VI 法では大規模な連立方程式を解く必要があるため、並列計算機を用いる場合、ノード間で大域的データ参照が起こる。**CRess** では、並列計算機を主なプラットフォームとして想定しているため、後者の HE-VE 法または HE-VI 法を採用している。詳しくは第 7 章「並列プログラムの実装」で述べるが、これらの方法では物理空間とノードの配置が対応し、ノード間の通信が隣接するノードの側面のみとなるため、大規模な並列化に適しやす。また、短い時間間隔で積分するのは音波に関する項（場合により、重力波モードもこれに含める）のみなので、計算の効率はそれほど悪くはない。

<sup>3</sup>メソ気象でも大規模なものや総観気象、およびプラネタリスケールの気象ではロスビー波程度の現象が対象となる。日々の天気を大きく支配するのはロスビー波スケールの大気擾乱で、通常用いられている予報モデルはこれを主な対象としている。

<sup>4</sup>数値モデルの基本方程式系そのものを、Ogura and Phillips (1962) による非弾性方程式系を用いれば、音波が含まれず時間間隔を重力波の位相速度で制限されるまで大きく取ることができる。この場合、気圧は運動方程式と連続の式から診断的に決まる。音波を除去できる利点がある一方、気圧の診断方程式が複雑になることや、密度変化が大きくなる場所では誤差が大きくなるなどの問題がある。

<sup>5</sup>本来、セミインプリシット法とは長い時間間隔を取れるモードとそれ以外のモードに分けて、前者を陽解法で後者を陰解法で解く方法で、たとえば気象庁の予報モデルは、重力波に関する項を陰解法で、それ以外をリーブフロッグスキームで解くというセミインプリシット法を用いている。

## 音波モードを含む物理量の離散化方法

ここからは、音波モードを含む物理量についての離散化方法を述べる。ここでは、重力波モードは長い時間間隔で評価されるものとし、その場合には、音波モードが含まれない温位と水蒸気混合比および水物質の混合比・数密度はすべて長い時間間隔で計算されることになるので、それらの物理量の離散化については考慮しない。

ここに *CReSS* で用いている基本方程式系を音波モードを含む物理量について改めて示してみる。以下に示す方程式系で、 $[rm]$  はロスビー波モード（回転成分）に関する項を、 $[gm]$  は重力波モード（発散成分）に関する項を、 $[am]$  は音波モードに関する項を、 $[physics]$  は物理過程の項を表している。

## 運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} = & - \underbrace{\left( u^* \frac{\partial u}{\partial x} + v^* \frac{\partial u}{\partial y} + W^* \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)}_{[rm]} \\ & - \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x} \{ J_d (p' - \alpha Div^*) \} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \{ J_{31} (p' - \alpha Div^*) \} \right]}_{[am]} + \underbrace{(f_s v^* - f_c w^*)}_{[rm]} + \underbrace{G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} u}_{[physics]} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t} = & - \underbrace{\left( u^* \frac{\partial v}{\partial x} + v^* \frac{\partial v}{\partial y} + W^* \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right)}_{[rm]} \\ & - \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial y} \{ J_d (p' - \alpha Div^*) \} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \{ J_{32} (p' - \alpha Div^*) \} \right]}_{[am]} - \underbrace{f_s u^*}_{[rm]} + \underbrace{G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} v}_{[physics]} \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial t} = & - \underbrace{\left( u^* \frac{\partial w}{\partial x} + v^* \frac{\partial w}{\partial y} + W^* \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)}_{[rm]} \\ & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \zeta} (p' - \alpha Div^*)}_{[am]} - \rho^* g \underbrace{\left( \frac{\theta'}{\theta} - \frac{p'}{\rho c_s^2} + \frac{q'_v}{\epsilon + \bar{q}_v} - \frac{q'_v + \sum q_x}{1 + \bar{q}_v} \right)}_{[gm]} + \underbrace{f_c u^*}_{[rm]} + \underbrace{G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} w}_{[physics]} \end{aligned} \quad (6.3)$$

## 気圧の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} p'}{\partial t} = & - \underbrace{\left( G^{\frac{1}{2}} u \frac{\partial p'}{\partial x} + G^{\frac{1}{2}} v \frac{\partial p'}{\partial y} + G^{\frac{1}{2}} W \frac{\partial p'}{\partial \zeta} \right)}_{[rm]} + \underbrace{G^{\frac{1}{2}} \bar{\rho} g w}_{[am]} \\ & - \underbrace{\bar{\rho} c_s^2 \left( \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} u}{\partial x} + \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} v}{\partial y} + \frac{\partial G^{\frac{1}{2}} W}{\partial \zeta} \right)}_{[am]} + \underbrace{G^{\frac{1}{2}} \bar{\rho} c_s^2 \left( \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} \right)}_{[am]} \end{aligned} \quad (6.4)$$

これらの方程式系を、図 6.1 に示した格子系について有限差分法を用いて離散化し、数値積分を行うのであるが、スタッガード格子を用いているので同じ位置の値を求めるために平均化の操作が必要である。そのための平均化オペレーターを、次のように定義する。任意の物理量  $\phi$  について、空間の  $x$  方向 ( $= x, y, \zeta$  方向) の平均化オペレーターを、側面から  $i$  番目の格子点を下つき添え字で表わして、

$$\overline{\phi}_i^x = \frac{1}{2} (\phi_{i-\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{1}{2}}) \quad (6.5)$$

のように、また、4 次の精度の中心差分に現れる 4 点の平均を、

$$\overline{\phi}_i^{2x} = \frac{1}{4} (\phi_{i-\frac{3}{2}} + \phi_{i-\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{3}{2}}) \quad (6.6)$$

のように定義する。平均化の添字が 2 つある場合、例えば  $x, z$  について示せば (ただし、 $x, z$  方向のそれぞれの格子点番号の添字を  $i, k$  とする)、次のようになる。

$$\overline{\phi}_{ik}^{xz} = \frac{1}{4} (\phi_{i-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} + \phi_{i-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}) \quad (6.7)$$

さらに、微分オペレーターを定義する。ある方向  $x$  の格子間隔を  $\Delta x$  とすると、微分オペレーターは、平均化オペレーターと同様に側面から  $i$  番目の格子点を下つき添え字で表わして、以下のようにする。

$$(\partial_x \phi)_i = \frac{1}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{\Delta x}{2}} - \phi_{i-\frac{\Delta x}{2}}) \quad (6.8)$$

$$(\partial_{2x} \phi)_i = \frac{1}{2\Delta x} (\phi_{i+\Delta x} - \phi_{i-\Delta x}) \quad (6.9)$$

これらを用いて、改めて数値計算で用いる従属変数を、次のように定義する。

$$\rho^* = \overline{\rho G^{\frac{1}{2}}} \quad (6.10)$$

$$u^* = \overline{\rho G^{\frac{1}{2}}^x} u \quad (6.11)$$

$$v^* = \overline{\rho G^{\frac{1}{2}}^y} v \quad (6.12)$$

$$w^* = \overline{\rho G^{\frac{1}{2}}^{\zeta}} w \quad (6.13)$$

$$W^* = \overline{\rho G^{\frac{1}{2}}^{\zeta}} W \quad (6.14)$$

ここで、密度  $\bar{\rho}$  と座標変換のヤコビアン  $G^{\frac{1}{2}}$  は同じスカラー一点で定義されている。また、デカルト座標での鉛直速度  $w$  と地形に沿う座標系における鉛直速度 (反変速度)  $W$  は同じ点で定義され、

$$W = \frac{(\overline{u^{\zeta}} J_{31}^x + \overline{v^{\zeta}} J_{32}^y + w)}{\overline{G^{\frac{1}{2}}^{\zeta}}} \quad (6.15)$$

となる。

これらの表記を用いて、(6.1)~(6.4) を離散化し、 $u, v, w, p'$  について、音波に関して短い時間間隔  $\Delta\tau$  で積分する項を陽に書き、それ以外の、重力波とロスビー波に関係する部分および物理過程を  $F_\phi^t$  (ただし、 $\phi = u, v, w, p'$ ) に含めると、水平・鉛直ともに陽解法の場合は、

$$\overline{\rho^{*x}} \frac{u^{\tau+\Delta\tau} - u^\tau}{\Delta\tau} = - \left[ \partial_x (J_d P_\alpha) + \partial_\zeta \left( J_{31} \overline{P_\alpha^{\zeta x}} \right) \right]^\tau + F_u^t \quad (6.16)$$

$$\overline{\rho^{*y}} \frac{v^{\tau+\Delta\tau} - v^\tau}{\Delta\tau} = - \left[ \partial_y (J_d P_\alpha) + \partial_\zeta \left( J_{32} \overline{P_\alpha^{\zeta y}} \right) \right]^\tau + F_v^t \quad (6.17)$$

$$\overline{\rho^{*\zeta}} \frac{w^{\tau+\Delta\tau} - w^\tau}{\Delta\tau} = - [\partial_\zeta P_\alpha]^\tau - \left[ g G^{\frac{1}{2}} \frac{p'}{c_s^2} \right]^\tau + F_w^t \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \overline{G^{\frac{1}{2}\zeta}} \frac{p'^{\tau+\Delta\tau} - p'^\tau}{\Delta\tau} &= -\bar{\rho} c_s^2 \left[ \partial_x \left( \overline{G^{\frac{1}{2}x}} u \right) + \partial_\zeta \left( \overline{J_{31} \overline{w^\zeta x}} \right) + \partial_y \left( \overline{G^{\frac{1}{2}y}} v \right) + \partial_\zeta \left( \overline{J_{32} \overline{w^\zeta y}} \right) + \partial_\zeta w \right]^\tau + \Delta\tau \\ &\quad + g \rho^* \left[ \overline{w^\zeta} \right]^\tau + F_p^t \end{aligned} \quad (6.19)$$

のように与えられる。ここで、

$$P_\alpha = p' - \alpha \text{Div}^* \quad (6.20)$$

ただし、

$$\text{Div}^* = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} (\partial_x u^* + \partial_y v^* + \partial_\zeta W^*) \quad (6.21)$$

である。また、 $\alpha$  は音波を抑えるために取り入れた発散項にかかる減衰係数である。(6.16) と (6.17) の右辺第 1 項、および、(6.18) の右辺第 2 項が気圧傾度力、(6.18) の右辺第 1 項と第 3 項が発散減衰項と気圧偏差による浮力項、(6.19) の右辺第 1 項が発散項、第 2 項が鉛直移流項である。

音波について陽解法で解かれる場合、(6.16)~(6.18) により、 $\Delta\tau$  だけ  $u, v, w$  が前進差分で計算され、次に、更新された速度を用いて気圧偏差  $p'$  が (6.19) により、 $\Delta\tau$  だけ後退差分で計算される。この短い時間間隔の積分は  $2\Delta t (= n\Delta\tau)$  について行なわれ、この間は  $F_\phi^t$  は一定として計算される。

音波項について、ほとんどの非静力学モデルでは、このような水平・鉛直ともに陽解法で解く方法は用いられていない。大抵は、水平・鉛直ともに陰解法 (HI-VI)、または、水平には陽解法、鉛直には陰解法 (HE-VI) となっている場合が多い。鉛直方向のみ陰的に解く方法については次に述べるが、対象とする計算が水平と鉛直の格子解像度が同じ程度になる場合は、当然ながら限界の時間間隔も水平・鉛直方向ともほぼ同じになるので、鉛直を陰解法で解く必要性は必ずしもない。さらに、重力波モードを短い時間間隔に含めるか長い時間間隔に含めるかによっても計算方法が異なるが、これについても後述する。

音波について鉛直陰解法の場合は、鉛直流  $w$  と気圧偏差  $p'$  の式 (6.18) と (6.19) が、重み  $\beta$  をつけて  $w, p'$  について時刻  $\tau$  と  $\tau + \Delta\tau$  の平均をしたものに置き換えられる。それらは次のようになる。

$$\begin{aligned} \overline{\rho^*}^\zeta \frac{w^{\tau+\Delta\tau} - w^\tau}{\Delta\tau} &= [\partial_\zeta(\alpha Div^*)]^\tau - \left[ \beta (\partial_\zeta p')^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\partial_\zeta p')^\tau \right] \\ &\quad - \left[ \beta \left( \overline{gG^{\frac{1}{2}} \frac{p'}{c_s^2}} \right)^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) \left( \overline{gG^{\frac{1}{2}} \frac{p'}{c_s^2}} \right)^\tau \right] + F_w^t \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \overline{G^{\frac{1}{2}}}^\zeta \frac{p'^{\tau+\Delta\tau} - p'^\tau}{\Delta\tau} &= -\bar{\rho}c_s^2 \left[ \partial_x \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} u} \right) + \partial_\zeta \left( \overline{J_{31} \bar{w}^\zeta} \right) + \partial_y \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} v} \right) + \partial_\zeta \left( \overline{J_{32} \bar{v}^\zeta} \right) \right]^{\tau+\Delta\tau} \\ &\quad - \bar{\rho}c_s^2 \left[ \beta (\partial_\zeta w)^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\partial_\zeta w)^\tau \right] \\ &\quad + g\rho^* \left[ \beta (\bar{w}^\zeta)^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\bar{w}^\zeta)^\tau \right] + F_p^t \end{aligned} \quad (6.23)$$

なお、これらの式で、 $w$  の式 (6.22) で  $\beta = 0$  かつ  $p'$  の式 (6.23) で  $\beta = 1$  とすると、それぞれ (6.18) と (6.19) の式に帰着する。 $\beta \neq 0$  の場合、(6.22) と (6.23) は、 $w^{\tau+\Delta\tau}, p'^{\tau+\Delta\tau}$  についての連立方程式となり、Crank-Nicolson スキームにより鉛直についてインプリシットに解かれる。

鉛直陰解法の場合、まず、(6.16) と (6.17) の前進差分が計算され、 $u, v$  については  $\tau + \Delta\tau$  の時刻の値が求められる。 $w$  と  $p$  については、(6.22) と (6.23) から  $p'^{\tau+\Delta\tau}$  を消去して、

$$\begin{aligned} \overline{\rho^*}^\zeta \frac{w^{\tau+\Delta\tau} - w^\tau}{\Delta\tau} &= -\Delta\tau\beta^2\partial_\zeta \left( \frac{g\rho^*}{G^{\frac{1}{2}}} \bar{w}^\zeta - \frac{\bar{\rho}c_s^2}{G^{\frac{1}{2}}} \partial_\zeta w \right)^{\tau+\Delta\tau} \\ &\quad - \Delta\tau\beta^2g \left( \frac{g\rho^*}{c_s^2} \bar{w}^\zeta - \bar{\rho}\partial_\zeta w^\zeta \right)^{\tau+\Delta\tau} + F_w' \end{aligned} \quad (6.24)$$

を得る。ここで、 $F_w'$  は  $F_p'$  を、

$$\begin{aligned} F_p' &= \frac{\Delta\tau}{G^{\frac{1}{2}}} \left[ F_p^t + (1-\beta) (g\rho^* \bar{w}^\zeta - \bar{\rho}c_s^2 \partial_\zeta w)^\tau \right] \\ &\quad - \frac{\Delta\tau}{G^{\frac{1}{2}}} \bar{\rho}c_s^2 \left[ \partial_x \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} u} \right) + \partial_\zeta \left( \overline{J_{31} \bar{w}^\zeta} \right) + \partial_y \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} v} \right) + \partial_\zeta \left( \overline{J_{32} \bar{v}^\zeta} \right) \right]^{\tau+\Delta\tau} \end{aligned} \quad (6.25)$$

として、

$$F_w' = -[\partial_\zeta P_\alpha]^\tau - \left[ \overline{gG^{\frac{1}{2}} \frac{p'}{c_s^2}} \right]^\tau - \beta \left[ \frac{gG^{\frac{1}{2}} F_p'}{c_s^2} + \partial_\zeta F_p' \right] + F_w^t \quad (6.26)$$

のように表わされる。



次に、(6.24) を鉛直方向に 2 次の精度で離散化して、未知の  $w^{\tau+\Delta\tau}$  について整理すると、

$$A_k w_{k-1}^{\tau+\Delta\tau} + B_k w_k^{\tau+\Delta\tau} + C_k w_{k+1}^{\tau+\Delta\tau} = F_k \quad (6.27)$$

のように、係数が 3 重対角行列となる連立方程式が得られる。これは、例えば次のような適当な上・下端の境界条件が与えられれば、直説法で簡単に解くことができる。

$$w = 0 \quad k = nz - 1 \quad (6.28)$$

$$w = u \frac{\partial z_{sfc}}{\partial x} + v \frac{\partial z_{sfc}}{\partial y} \quad k = 2 \quad (6.29)$$

ここで、 $A_k, B_k, C_k, F_k$  は、時刻  $\tau$  で求められる既知量であり、境界条件 (6.28),(6.29) の下で、それぞれ、

$$A_k = \begin{cases} 0 & k = 3 \\ \left( -Q_k c_{s_{k-1}}^2 + P_k G_{k-1}^{\frac{1}{2}} \right) (\mathcal{R}_{k-1} + \mathcal{S}_{k-1}), & 4 \leq k \leq nz - 2 \end{cases} \quad (6.30)$$

$$B_k = 1 + Q_k \{ (\mathcal{R}_k + \mathcal{S}_k) c_{s_k}^2 - (\mathcal{R}_{k-1} - \mathcal{S}_{k-1}) c_{s_{k-1}}^2 \} \\ + P_k \{ (\mathcal{R}_k + \mathcal{S}_k) G_k^{\frac{1}{2}} - (\mathcal{R}_{k-1} - \mathcal{S}_{k-1}) G_{k-1}^{\frac{1}{2}} \}, \quad 3 \leq k \leq nz - 2 \quad (6.31)$$

$$C_k = \begin{cases} \left( Q_k c_{s_k}^2 + P_k G_k^{\frac{1}{2}} \right) (\mathcal{R}_k + \mathcal{S}_k), & 3 \leq k \leq nz - 3 \\ 0, & k = nz - 2 \end{cases} \quad (6.32)$$

$$F_k = \begin{cases} F'_{w_k} + w_k^{\tau} + \bar{u}_k^{\zeta} (\partial_x z_{sfc})_k + \bar{v}_k^{\zeta} (\partial_y z_{sfc})_k, & k = 3 \\ F'_{w_k} + w_k^{\tau}, & 4 \leq k \leq nz - 2 \end{cases} \quad (6.33)$$

のように与えられる。なお、

$$P_k = \frac{\Delta\tau^2 \beta^2 g}{2\rho_k^* \zeta}, \quad Q_k = \frac{\Delta\tau^2 \beta^2}{\Delta\zeta_k \rho_k^* \zeta}, \quad \mathcal{R}_k = \frac{g\rho_k^*}{2G_k^{\frac{1}{2}} c_{s_k}^2}, \quad \mathcal{S}_k = \frac{\rho_k^*}{\Delta\zeta_k G_k} \quad (6.34)$$

である。

この連立方程式 (6.27) を、 $w_k^{\tau+\Delta\tau}$  を  $w_k$  に置き換えて行列表記すると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} B_3 & C_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_4 & B_4 & C_4 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k & B_k & C_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nz-2} & B_{nz-2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_{nz-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_{nz-2} \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

これを解くには、ガウスの消去法により前進消去・後退代入を実行すればよい。まず、前進消去を実行する。(6.35) の第1行目を  $B_3$  で除すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & c_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_4 & B_4 & C_4 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k & B_k & C_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nz-2} & B_{nz-2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_{nz-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 \\ F_4 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_{nz-2} \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

となる。ここで、 $c_3 = C_3/B_3$ 、 $f_3 = F_3/B_3$  である。次に、第2行目から第1行目に  $A_4$  を乗じたものを引き対角成分を規格化すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & c_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & c_4 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k & B_k & C_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nz-2} & B_{nz-2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_{nz-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ F_k \\ \vdots \\ F_{nz-2} \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

となる。ここで、 $c_4 = C_4/(B_4 - A_4c_3)$ 、 $f_4 = (F_4 - A_4f_3)/(B_4 - A_4c_3)$  である。以下、全く同様に、 $c_k = C_k/(B_k - A_kc_{k-1})$ 、 $f_k = (F_k - A_kf_{k-1})/(B_k - A_kc_{k-1})$  なる表記を用いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & c_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & c_4 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_{nz-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_{nz-2} \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

が得られる。最後に、以下の後退代入を  $k = nz - 2, nz - 3, \dots, 4$  の順に実行することにより、全ての  $k$  に対する解を求めることができる。

$$\begin{aligned}
 w_{nz-2} &= f_{nz-2} \\
 w_{nz-3} &= f_{nz-3} - c_{nz-3}w_{nz-2} \\
 &\vdots \\
 w_k &= f_k - c_k w_{k+1} \\
 &\vdots \\
 w_4 &= f_4 - c_4 w_5 \\
 w_3 &= f_3 - c_3 w_4
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

さて、長い時間間隔  $t$  で計算される項  $F_\phi^t$  は、次のように表される。

$$F_u^t = -[\text{Adv}.u]^t + \left[ \overline{\rho^* f_s \bar{v}^y}^x - \overline{\rho^* f_c \bar{w}^\zeta}^x \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}} \text{Turb}.u \right]^{t-\Delta t} \tag{6.40}$$

$$F_v^t = -[\text{Adv}.v]^t - \left[ \overline{\rho^* f_s \bar{u}^x}^y \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}} \text{Turb}.v \right]^{t-\Delta t} \tag{6.41}$$

$$F_w^t = -[\text{Adv}.w]^t + \left[ \overline{\rho^* (\text{Buoy}.\theta + \text{Buoy}.q)}^\zeta + \overline{\rho^* f_c \bar{u}^x}^\zeta \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}} \text{Turb}.w \right]^{t-\Delta t} \tag{6.42}$$

$$F_p^t = -[\text{Adv}.p]^t \tag{6.43}$$

ここで、 $\text{Buoy}.\theta, \text{Buoy}.q$  は浮力項のうち温位偏差と水蒸気・水物質によるもので、

$$\text{Buoy}.\theta \equiv g \frac{\theta'}{\theta} \tag{6.44}$$

$$\text{Buoy}.q \equiv g \left( \frac{q'_v}{\epsilon + \bar{q}_v} - \frac{q'_v + \sum q_x}{1 + \bar{q}_v} \right) \tag{6.45}$$

のように定義される。

移流項は、2次または4次の精度で計算され、時刻  $t$  において評価される。2次の精度の移流項は、

$$\text{Adv}.u = \overline{u^{*x}} \partial_x u + \overline{v^{*x}} \partial_y u + \overline{W^{*x}} \partial_\zeta u \tag{6.46}$$

$$\text{Adv}.v = \overline{u^{*y}} \partial_x v + \overline{v^{*y}} \partial_y v + \overline{W^{*y}} \partial_\zeta v \tag{6.47}$$

$$\text{Adv}.w = \overline{u^{*\zeta}} \partial_x w + \overline{v^{*\zeta}} \partial_y w + \overline{W^{*\zeta}} \partial_\zeta w \tag{6.48}$$

$$\text{Adv}.p = G^{\frac{1}{2}} \overline{u^x} \partial_x p' + G^{\frac{1}{2}} \overline{v^y} \partial_y p' + G^{\frac{1}{2}} \overline{W^\zeta} \partial_\zeta p' \tag{6.49}$$

のように、4次の精度の移流項は、

$$\begin{aligned} \text{Adv.}u &= \frac{4}{3} \left[ \overline{u^{*x}} \partial_x u + \overline{v^{*x}} \partial_y u + \overline{W^{*x}} \partial_\zeta u \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ \overline{u^{*2x}} \partial_{2x} u + \overline{v^{*xy}} \partial_{2y} u + \overline{W^{*x\zeta}} \partial_{2\zeta} u \right] \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} \text{Adv.}v &= \frac{4}{3} \left[ \overline{u^{*y}} \partial_x v + \overline{v^{*y}} \partial_y v + \overline{W^{*y}} \partial_\zeta v \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ \overline{u^{*xy}} \partial_{2x} v + \overline{v^{*2y}} \partial_{2y} v + \overline{W^{*y\zeta}} \partial_{2\zeta} v \right] \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \text{Adv.}w &= \frac{4}{3} \left[ \overline{u^{*\zeta}} \partial_x w + \overline{v^{*\zeta}} \partial_y w + \overline{W^{*\zeta}} \partial_\zeta w \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ \overline{u^{*x\zeta}} \partial_{2x} w + \overline{v^{*y\zeta}} \partial_{2y} w + \overline{W^{*2\zeta}} \partial_{2\zeta} w \right] \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} \text{Adv.}p &= \frac{4}{3} \left[ \overline{G^{\frac{1}{2}x}} u \partial_x p' + \overline{G^{\frac{1}{2}y}} v \partial_y p' + \overline{G^{\frac{1}{2}\zeta}} W \partial_\zeta p' \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ \overline{G^{\frac{1}{2}x}} u \partial_{2x} p' + \overline{G^{\frac{1}{2}y}} v \partial_{2y} p' + \overline{G^{\frac{1}{2}\zeta}} W \partial_{2\zeta} p' \right] \end{aligned} \quad (6.53)$$

のように離散化される。なお、このような中心差分による離散化では、計算不安定を発生するので次節6.2で詳述する人工的な粘性項が付加される。

乱流拡散項は圧力以外の変数に適用され、まず、(3.10)~(3.15)で表わされる変形速度テンソル  $S_{ij}$  を、

$$S_{11} = \frac{2}{G^{\frac{1}{2}}} \left[ \partial_x \left( \overline{J_d^x u} \right) + \partial_\zeta \left( \overline{J_{31} u^\zeta} \right) \right] \quad (6.54)$$

$$S_{22} = \frac{2}{G^{\frac{1}{2}}} \left[ \partial_y \left( \overline{J_d^y v} \right) + \partial_\zeta \left( \overline{J_{32} v^\zeta} \right) \right] \quad (6.55)$$

$$S_{33} = \frac{2}{G^{\frac{1}{2}}} \partial_\zeta w \quad (6.56)$$

$$S_{12} = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[ \partial_y \left( \overline{J_d^x u} \right) + \partial_x \left( \overline{J_d^y v} \right) + \partial_\zeta \left( \overline{J_{32} u^\zeta} + \overline{J_{31} v^\zeta} \right) \right] \quad (6.57)$$

$$S_{13} = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[ \partial_x \left( \overline{J_d^\zeta w} \right) + \partial_\zeta \left( u + \overline{J_{31} w^\zeta} \right) \right] \quad (6.58)$$

$$S_{23} = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[ \partial_y \left( \overline{J_d^\zeta w} \right) + \partial_\zeta \left( v + \overline{J_{32} w^\zeta} \right) \right] \quad (6.59)$$

のように、(3.16) で表わされる発散項  $Div$  を、

$$Div = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[ \partial_x \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} u} \right) + \partial_y \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} v} \right) + \partial_\zeta \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} W} \right) \right] \quad (6.60)$$

のように差分化し、これらを用いて、式 (3.9) で表わされる応力テンソル  $\tau_{ij}$  を、

$$\tau_{11} = \bar{\rho} \nu_{\tau h} \left( S_{11} - \frac{2}{3} Div \right) \quad (6.61)$$

$$\tau_{12} = \overline{\bar{\rho} \nu_{\tau h}^{xy}} S_{12} \quad (6.62)$$

$$\tau_{13} = \overline{\bar{\rho} \nu_{\tau v}^{x\zeta}} S_{13} \quad (6.63)$$

$$\tau_{21} = \overline{\bar{\rho} \nu_{\tau h}^{yx}} S_{21} \quad (6.64)$$

$$\tau_{22} = \bar{\rho} \nu_{\tau h} \left( S_{22} - \frac{2}{3} Div \right) \quad (6.65)$$

$$\tau_{23} = \overline{\bar{\rho} \nu_{\tau v}^{y\zeta}} S_{23} \quad (6.66)$$

$$\tau_{31} = \overline{\bar{\rho} \nu_{\tau h}^{\zeta x}} S_{31} \quad (6.67)$$

$$\tau_{32} = \overline{\bar{\rho} \nu_{\tau h}^{\zeta y}} S_{32} \quad (6.68)$$

$$\tau_{33} = \bar{\rho} \nu_{\tau v} \left( S_{33} - \frac{2}{3} Div \right) \quad (6.69)$$

のように差分化する。最終的に、乱流拡散項の差分表示は、

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} u = \partial_x (J_d \tau_{11}) + \partial_y \left( \overline{J_d^{xy}} \tau_{12} \right) + \partial_\zeta \left( \tau_{13} + J_{31} \overline{\tau_{11}^{x\zeta}} + \overline{J_{32}^x \tau_{12}^{\zeta y}} \right) \quad (6.70)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} v = \partial_x \left( \overline{J_d^{yx}} \tau_{21} \right) + \partial_y (J_d \tau_{22}) + \partial_\zeta \left( \tau_{23} + \overline{J_{31}^y \tau_{21}^{\zeta x}} + J_{32} \overline{\tau_{22}^{y\zeta}} \right) \quad (6.71)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} w = \partial_x \left( \overline{J_d^{\zeta x}} \tau_{31} \right) + \partial_y \left( \overline{J_d^{\zeta y}} \tau_{32} \right) + \partial_\zeta \left( \tau_{33} + \overline{J_{31}^{\zeta} \tau_{31}^{\zeta x}} + \overline{J_{32}^{\zeta} \tau_{32}^{\zeta y}} \right) \quad (6.72)$$

となる。

## 音波モードを含まない物理量の離散化方法

重力波モードを長い時間間隔で評価する場合、温位偏差と水蒸気および水物質の式は長い時間間隔のみで解かれる。水蒸気および水物質を  $x$  で表すと、これらは、

$$\rho^* \frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = F_\theta^t \quad (6.73)$$

$$\rho^* \frac{q_x^{t+\Delta t} - q_x^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = F_q^t \quad (6.74)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \frac{N_x^{t+\Delta t} - N_x^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = F_N^t \quad (6.75)$$

となる。ここで、

$$F_\theta^t = -[\text{Adv.}\theta]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.}\theta \right]^{t-\Delta t} + [\rho^* \text{Src.}\theta]^t - \left[ \overline{\rho^\zeta w \partial_\zeta \theta} \right]^t \quad (6.76)$$

$$F_q^t = -[\text{Adv.}q_x]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.}q_x \right]^{t-\Delta t} + [\rho^* \text{Src.}q_x]^t + [\rho^* \text{Fall.}q_x]^t \quad (6.77)$$

$$F_N^t = -\left[ \text{Adv.} \frac{N_x}{\rho^*} \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} \frac{N_x}{\rho^*} \right]^{t-\Delta t} + \left[ \rho^* \text{Src.} \frac{N_x}{\rho^*} \right]^t + \left[ \rho^* \text{Fall.} \frac{N_x}{\rho^*} \right]^t \quad (6.78)$$

であり、温位偏差の式 (6.76) の右辺第4項は、基本場の温位の鉛直移流による重力波項である。

音波モードを含む物理量の場合と同様に、移流項は時刻  $t$  で評価され、2次の精度のスキームは、

$$\text{Adv.}\theta = \overline{u^* \partial_x \theta'^x} + \overline{v^* \partial_y \theta'^y} + \overline{W^* \partial_\zeta \theta'^\zeta} \quad (6.79)$$

$$\text{Adv.}q_x = \overline{u^* \partial_x q_x^x} + \overline{v^* \partial_y q_x^y} + \overline{W^* \partial_\zeta q_x^\zeta} \quad (6.80)$$

$$\text{Adv.} \frac{N_x}{\rho^*} = \overline{u^* \partial_x \frac{N_x}{\rho^*}^x} + \overline{v^* \partial_y \frac{N_x}{\rho^*}^y} + \overline{W^* \partial_\zeta \frac{N_x}{\rho^*}^\zeta} \quad (6.81)$$

4次の精度の移流項は、

$$\begin{aligned} \text{Adv.}\theta &= \frac{4}{3} \left[ \overline{u^* \partial_x \theta'^x} + \overline{v^* \partial_y \theta'^y} + \overline{W^* \partial_\zeta \theta'^\zeta} \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ \overline{u^{*x} \partial_{2x} \theta'^{2x}} + \overline{v^{*y} \partial_{2y} \theta'^{2y}} + \overline{W^{*\zeta} \partial_{2\zeta} \theta'^{2\zeta}} \right] \end{aligned} \quad (6.82)$$

$$\begin{aligned} \text{Adv.}q_x &= \frac{4}{3} \left[ \overline{u^* \partial_x q_x^x} + \overline{v^* \partial_y q_x^y} + \overline{W^* \partial_\zeta q_x^\zeta} \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ \overline{u^{*x} \partial_{2x} q_x^{2x}} + \overline{v^{*y} \partial_{2y} q_x^{2y}} + \overline{W^{*\zeta} \partial_{2\zeta} q_x^{2\zeta}} \right] \end{aligned} \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned} \text{Adv.} \frac{N_x}{\rho^*} &= \frac{4}{3} \left[ \overline{u^* \partial_x \frac{N_x}{\rho^*}} + \overline{v^* \partial_y \frac{N_x}{\rho^*}} + \overline{W^* \partial_\zeta \frac{N_x}{\rho^*}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ \overline{u^{*x} \partial_{2x} \frac{N_x}{\rho^*}} + \overline{v^{*y} \partial_{2y} \frac{N_x}{\rho^*}} + \overline{W^{*\zeta} \partial_{2\zeta} \frac{N_x}{\rho^*}} \right] \end{aligned} \quad (6.84)$$

となり、乱流拡散項は、(3.18)~(3.20) で表わされるあるスカラー量  $\phi$  の乱流フラックス  $H_{\phi 1}, H_{\phi 2}, H_{\phi 3}$  を、

$$H_{\phi 1} = \left( \overline{\bar{\rho} \nu_{Hh} \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}} \right)^x \left[ \partial_x (J_d \phi) + \partial_\zeta (J_{31} \bar{\phi}^{x\zeta}) \right] \quad (6.85)$$

$$H_{\phi 2} = \left( \overline{\bar{\rho} \nu_{Hh} \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}} \right)^y \left[ \partial_y (J_d \phi) + \partial_\zeta (J_{32} \bar{\phi}^{y\zeta}) \right] \quad (6.86)$$

$$H_{\phi 3} = \left( \overline{\bar{\rho} \nu_{Hv} \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}}} \right)^\zeta \partial_\zeta \bar{\phi}^\zeta \quad (6.87)$$

と差分化し、最終的に、

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} \theta = \partial_x (\bar{J}_d^x H_{\theta 1}) + \partial_y (\bar{J}_d^y H_{\theta 2}) + \partial_\zeta \left( H_{\theta 3} + \overline{J_{31} \bar{H}_{\theta 1}^{\zeta x}} + \overline{J_{32} \bar{H}_{\theta 2}^{\zeta y}} \right) \quad (6.88)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} q_x = \partial_x (\bar{J}_d^x H_{q_x 1}) + \partial_y (\bar{J}_d^y H_{q_x 2}) + \partial_\zeta \left( H_{q_x 3} + \overline{J_{31} \bar{H}_{q_x 1}^{\zeta x}} + \overline{J_{32} \bar{H}_{q_x 2}^{\zeta y}} \right) \quad (6.89)$$

$$G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} \frac{N_x}{\rho^*} = \partial_x (\bar{J}_d^x H_{N_x 1}) + \partial_y (\bar{J}_d^y H_{N_x 2}) + \partial_\zeta \left( H_{N_x 3} + \overline{J_{31} \bar{H}_{N_x 1}^{\zeta x}} + \overline{J_{32} \bar{H}_{N_x 2}^{\zeta y}} \right) \quad (6.90)$$

のようになる。

#### 重力波モードを短い時間間隔に含める場合の離散化方法

重力波モードを短い時間間隔に含める場合、次の温位の方程式、

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = - \underbrace{\left( u^* \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v^* \frac{\partial \theta'}{\partial y} + W^* \frac{\partial \theta'}{\partial \zeta} \right)}_{[rm]} - \underbrace{\bar{\rho} w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \zeta}}_{[gm]} + \underbrace{G^{\frac{1}{2}} \text{Turb.} \theta}_{[physics]} + \underbrace{\rho^* \text{Src.} \theta}_{[physics]} \quad (6.91)$$

の右辺第2項が  $\Delta \tau$  で評価され、その時間積分は、

$$\rho^* \frac{\theta'^{\tau+\Delta\tau} - \theta'^\tau}{\Delta\tau} = - \left[ \overline{\bar{\rho}^\zeta w \partial_\zeta \bar{\theta}^\zeta} \right]^\tau + F_\theta^t \quad (6.92)$$

のように表わされ、鉛直速度  $w$  についての時間積分も、(6.44) の温位  $\theta$  に関する浮力項が  $\Delta\tau$  で評価されるので、

$$\begin{aligned} \overline{\rho^*}^\zeta \frac{w^{\tau+\Delta\tau} - w^\tau}{\Delta\tau} &= [\partial_\zeta(\alpha Div^*)]^\tau + g \left[ \overline{\rho^* \frac{\theta'}{\theta}}^\zeta \right]^\tau - \left[ \beta (\partial_\zeta p')^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) (\partial_\zeta p')^\tau \right] \\ &\quad - \left[ \beta \left( \overline{g G^{\frac{1}{2}} \frac{p'}{c_s^2}}^\zeta \right)^{\tau+\Delta\tau} + (1-\beta) \left( \overline{g G^{\frac{1}{2}} \frac{p'}{c_s^2}}^\zeta \right)^\tau \right] + F_w^t \end{aligned} \quad (6.93)$$

となる。また、それに伴い、長い時間間隔で計算される項が、

$$F_w^t = -[\text{Adv}.w]^t + \left[ \overline{\rho^* \text{Buoy}.q}^\zeta + \overline{\rho^* f_c \bar{u}^x}^\zeta \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}} \text{Turb}.w \right]^{t-\Delta t} \quad (6.94)$$

$$F_\theta^t = -[\text{Adv}.\theta]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}} \text{Turb}.\theta \right]^{t-\Delta t} + [\rho^* \text{Src}.\theta]^t \quad (6.95)$$

のように変更される。

### 乱流運動エネルギーの離散化方法

1.5 次のクロージャーにおいては乱流運動エネルギーの時間発展方程式が用いられるが、これは長い時間間隔で、

$$\rho^* \frac{E^{t+\Delta t} - E^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = F_E^t \quad (6.96)$$

のように解かれる。ここで、

$$\begin{aligned} F_E^t &= -[\text{Adv}.E]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}} \text{Turb}.E \right]^{t-\Delta t} \\ &\quad + [\text{Buoy}.E]^{t-\Delta t} + \left[ \rho^* \left( \frac{1}{2} \nu_E Def^2 - \frac{2}{3} E Div \right) \right]^{t-\Delta t} - \left[ \rho^* \left( \frac{C_e}{l_h} E^{\frac{3}{2}} \right) \right]^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (6.97)$$

であり、右辺第3項の位置エネルギーと運動エネルギーの変換項  $\text{Buoy}.E$  は、

$$\text{Buoy}.E = \begin{cases} \overline{-g \bar{\rho} \nu_{Hv}}^\zeta \left( \overline{A}^\zeta \partial_\zeta \theta_e - \partial_\zeta q_{all} \right), & q_v \geq q_{vsw} \text{ or } q_c + q_i > 0 \\ \overline{-g \bar{\rho} \nu_{Hv}}^\zeta \left[ \left( \frac{1}{\theta} \right)^\zeta \partial_\zeta \theta + 0.61 \partial_\zeta q_v \right], & q_v < q_{vsw} \text{ or } q_c + q_i = 0 \end{cases} \quad (6.98)$$



第4項の  $Div$ ,  $Def$  はそれぞれ、

$$Div = \frac{1}{G^{\frac{1}{2}}} \left[ \partial_x \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} u} \right) + \partial_y \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} v} \right) + \partial_\zeta \left( \overline{G^{\frac{1}{2}} W} \right) \right] \quad (6.99)$$

$$Def^2 = \frac{1}{2} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) + \left( \overline{S_{12}^{xy}} \right)^2 + \left( \overline{S_{13}^{x\zeta}} \right)^2 + \left( \overline{S_{23}^{y\zeta}} \right)^2 - \frac{2}{3} Div^2 \quad (6.100)$$

と離散化される。また、他の予報変数と同様に、移流項は時間  $t$  で評価され、2次精度のスキームが、

$$Adv.E = \overline{u^* \partial_x E^x} + \overline{v^* \partial_y E^y} + \overline{W^* \partial_\zeta E^\zeta} \quad (6.101)$$

$$(6.102)$$

のように、4次精度のスキームが、

$$Adv.E = \frac{4}{3} \left[ \overline{u^* \partial_x E^x} + \overline{v^* \partial_y E^y} + \overline{W^* \partial_\zeta E^\zeta} \right] - \frac{1}{3} \left[ \overline{u^{*x} \partial_{2x} E^{2x}} + \overline{v^{*y} \partial_{2y} E^{2y}} + \overline{W^{*\zeta} \partial_{2\zeta} E^{2\zeta}} \right] \quad (6.103)$$

のように与えられる。乱流拡散項も同様に、

$$G^{\frac{1}{2}} Turb.E = \partial_x \left( \overline{J_d^x H_{E1}} \right) + \partial_y \left( \overline{J_d^y H_{E2}} \right) + \partial_\zeta \left( H_{E3} + \overline{J_{31} H_{E1}^\zeta} + \overline{J_{32} H_{E2}^\zeta} \right) \quad (6.104)$$

のように与えられる。

#### 時間フィルター

長い時間間隔における時間積分は、リープフロッグスキームを用いて行われる。この方法を用いると、奇数タイムステップと偶数タイムステップの間で解の分離が起りやすい。そこで、その解の分離を抑えるために Asselin の時間フィルター (Asselin, 1972) を用いて、時間  $t + \Delta t$  の物理量が求められた後、時間  $t$  の物理量をフィルタリングする。

予報変数  $u, v, w, p'$  および  $\theta', q_x, N_x, E$  を  $\psi$  で代表すると、Asselin の時間フィルターは、

$$\overline{\psi^t} = \psi^t + \mu_a \left( \overline{\psi^{t-\Delta t}} - 2\psi^t + \psi^{t+\delta t} \right) \quad (6.105)$$

と表わされる。ここで、 $\mu_a$  はフィルターの係数で、 $\mu_a = 0.1$  が標準的な値である。

## 6.2 人工的な数値粘性項

### 6.2.1 数値粘性項の必要性

前節で、移流項は 2 次または 4 次の中心差分によって表現され、その場合には人工的な粘性項を付加しないと計算不安定を発生することを述べた。これは、以下に示す理由による。

さて、1 次元の線型波動方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (c > 0) \quad (6.106)$$

を、次のような方法で離散化する。なお、ここでは半格子ずれた格子配置は考えていない。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^t}{\Delta t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+\Delta x}^t - u_{i-\Delta x}^t}{2\Delta x} \quad (6.107)$$

すると、式 (6.106) は、

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t - \frac{c}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_{i+\Delta x}^t - u_{i-\Delta x}^t) \quad (6.108)$$

となり、時刻  $t$  の値を用いて時刻  $t + \Delta t$  の値が求められる。しかし、この計算を実行するときに、CFL 条件を満たすように  $\Delta t, \Delta x$  の関係を決めたとしてもこの計算は破綻してしまう。

次に、他の離散化の方法として、安定に計算できる（計算精度が高いという意味ではない）1 次の風上差分を考える。この離散化を式 (6.106) に適用すると、

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t - c \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_i^t - u_{i-\Delta x}^t) \quad (6.109)$$

であるが、これを最初の離散化法の (6.108) を用いた形に変形してみると、

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t - \frac{c}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_{i+\Delta x}^t - u_{i-\Delta x}^t) + \frac{c}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_{i+\Delta x}^t - 2u_i^t + u_{i-\Delta x}^t) \quad (6.110)$$

となる。付加されている項は空間の 2 階微分  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  の差分近似であり、拡散的に働く。この理由から 1 次の風上差分法は安定に計算ができるわけであるが、中心差分法においては、ここに現れた拡散項を人工的な数値粘性項として移流項に付加して計算を安定化させる。

### 6.2.2 2 次と 4 次の拡散項をもつ数値粘性

一般に偶数階の微分は拡散の作用をもつので、前節で説明した拡散項は 4 次、6 次…と微分の階数を上げていくことができる。ここでは、2 次の拡散項をもつ数値粘性と 4 次の拡散項をもつ数値粘性を説明する。

まず、2 次の数値粘性は、任意の物理量を  $\phi$  で代表して、

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.\phi = \nu_{2h} \left[ \frac{\partial^2 (\bar{\rho}\phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{\rho}\phi)}{\partial y^2} \right] + \nu_{2v} \frac{\partial^2 (\bar{\rho}\phi)}{\partial \zeta^2} \quad (6.111)$$

となる。なお、温位と水蒸気については、基準状態からの偏差 ( $\theta' = \theta - \bar{\theta}$ ,  $q'_v = q_v - \bar{q}_v$ ) を用いて計算される。ここで、 $\nu_{2h}, \nu_{2v}$  は粘性係数で、次のように定義される。

$$\nu_{2h} = \frac{\alpha_{2h} \Delta_h^2}{\Delta t} \quad (6.112)$$

$$\nu_{2v} = \frac{\alpha_{2v} \Delta_v^2}{\Delta t} \quad (6.113)$$

ただし、

$$\Delta_h = (\Delta x \Delta y)^{\frac{1}{2}} \quad (6.114)$$

$$\Delta_v = \Delta \zeta \quad (6.115)$$

であり、それぞれ計算領域の水平・鉛直方向の平均の格子間隔を表す。また、 $\alpha_{2h}, \alpha_{2v}$  は無次元量で、安定計算のためには、

$$\alpha_{2h} \leq \frac{1}{8}, \quad \alpha_{2v} \leq \frac{1}{8} \quad (6.116)$$

を満たさなければならない。こうして、この粘性項が圧力偏差以外の予報変数に適用される。

差分表示は、2 次の微分オペレーターを、

$$(\partial_x^2 \phi)_i = \frac{1}{\Delta x} (\phi_{i+\Delta x} - 2\phi_i + \phi_{i-\Delta x}) \quad (6.117)$$

と定義すれば、各予報変数に対して以下ようになる。

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.u = \nu_{2h} [\partial_x^2 (\bar{\rho}^x u) + \partial_y^2 (\bar{\rho}^x u)] + \nu_{2v} [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}^x u)] \quad (6.118)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.v = \nu_{2h} [\partial_x^2 (\bar{\rho}^y v) + \partial_y^2 (\bar{\rho}^y v)] + \nu_{2v} [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}^y v)] \quad (6.119)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.w = \nu_{2h} [\partial_x^2 (\bar{\rho}^\zeta w) + \partial_y^2 (\bar{\rho}^\zeta w)] + \nu_{2v} [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}^\zeta w)] \quad (6.120)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.\theta = \nu_{2h} [\partial_x^2 (\bar{\rho}\theta') + \partial_y^2 (\bar{\rho}\theta')] + \nu_{2v} [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}\theta')] \quad (6.121)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.q_v = \nu_{2h} [\partial_x^2 (\bar{\rho}q'_v) + \partial_y^2 (\bar{\rho}q'_v)] + \nu_{2v} [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}q'_v)] \quad (6.122)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.q_x = \nu_{2h} [\partial_x^2 (\bar{\rho}q_x) + \partial_y^2 (\bar{\rho}q_x)] + \nu_{2v} [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}q_x)] \quad (6.123)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.\frac{N_x}{\rho^*} = \nu_{2h} \left[ \partial_x^2 \left( \bar{\rho} \frac{N_x}{\rho^*} \right) + \partial_y^2 \left( \bar{\rho} \frac{N_x}{\rho^*} \right) \right] + \nu_{2v} \left[ \partial_\zeta^2 \left( \bar{\rho} \frac{N_x}{\rho^*} \right) \right] \quad (6.124)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.E = \nu_{2h} [\partial_x^2 (\bar{\rho}E) + \partial_y^2 (\bar{\rho}E)] + \nu_{2v} [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}E)] \quad (6.125)$$

次に、4次の数値粘性は、2次の場合と同様に変数名を $\phi$ で代表して、温位と水蒸気については基準状態からの偏差として、

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.\phi = -\nu_{4h} \left[ \frac{\partial^4 (\bar{\rho}\phi)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 (\bar{\rho}\phi)}{\partial y^4} \right] - \nu_{4v} \frac{\partial^4 (\bar{\rho}\phi)}{\partial \zeta^4} \quad (6.126)$$

となる。ここで、 $\nu_{4h}, \nu_{4v}$  は粘性係数を表し、次のように定義される。

$$\nu_{4h} = \frac{\alpha_{4h} \Delta_h^4}{\Delta t} \quad (6.127)$$

$$\nu_{4v} = \frac{\alpha_{4v} \Delta_v^4}{\Delta t} \quad (6.128)$$

ただし、 $\alpha_{4h}, \alpha_{4v}$  は無次元量で、

$$\alpha_{4h} = 0.001, \quad \alpha_{4v} = 0.001 \quad (6.129)$$

が典型的によく用いられる。この粘性項も、2次の場合と同様に、圧力偏差以外の予報変数に適用される。

差分表示は、各予報変数に対して以下ようになる。

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.u = -\nu_{4h} [\partial_x^2 \{ \partial_x^2 (\bar{\rho}^x u) \} + \partial_y^2 \{ \partial_y^2 (\bar{\rho}^x u) \}] - \nu_{4v} \partial_\zeta^2 [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}^x u)] \quad (6.130)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.v = -\nu_{4h} [\partial_x^2 \{ \partial_x^2 (\bar{\rho}^y v) \} + \partial_y^2 \{ \partial_y^2 (\bar{\rho}^y v) \}] - \nu_{4v} \partial_\zeta^2 [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}^y v)] \quad (6.131)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.w = -\nu_{4h} [\partial_x^2 \{ \partial_x^2 (\bar{\rho}^z w) \} + \partial_y^2 \{ \partial_y^2 (\bar{\rho}^z w) \}] - \nu_{4v} \partial_\zeta^2 [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}^z w)] \quad (6.132)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.\theta = -\nu_{4h} [\partial_x^2 \{ \partial_x^2 (\bar{\rho}\theta') \} + \partial_y^2 \{ \partial_y^2 (\bar{\rho}\theta') \}] - \nu_{4v} \partial_\zeta^2 [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}\theta')] \quad (6.133)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.q_v = -\nu_{4h} [\partial_x^2 \{ \partial_x^2 (\bar{\rho}q'_v) \} + \partial_y^2 \{ \partial_y^2 (\bar{\rho}q'_v) \}] - \nu_{4v} \partial_\zeta^2 [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}q'_v)] \quad (6.134)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.q_x = -\nu_{4h} [\partial_x^2 \{ \partial_x^2 (\bar{\rho}q_x) \} + \partial_y^2 \{ \partial_y^2 (\bar{\rho}q_x) \}] - \nu_{4v} \partial_\zeta^2 [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}q_x)] \quad (6.135)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.\frac{N_x}{\rho^*} = -\nu_{4h} \left[ \partial_x^2 \left\{ \partial_x^2 \left( \bar{\rho} \frac{N_x}{\rho^*} \right) \right\} + \partial_y^2 \left\{ \partial_y^2 \left( \bar{\rho} \frac{N_x}{\rho^*} \right) \right\} \right] - \nu_{4v} \partial_\zeta^2 \left[ \partial_\zeta^2 \left( \bar{\rho} \frac{N_x}{\rho^*} \right) \right] \quad (6.136)$$

$$G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.E = -\nu_{4h} [\partial_x^2 \{ \partial_x^2 (\bar{\rho}E) \} + \partial_y^2 \{ \partial_y^2 (\bar{\rho}E) \}] - \nu_{4v} \partial_\zeta^2 [\partial_\zeta^2 (\bar{\rho}E)] \quad (6.137)$$

なお、4次の拡散項をもつ数値粘性項は、第3章「サブグリッドスケールの拡散」で述べた拡散項  $\text{Turb}.\phi$  と区別ができるだけでなく、微分の階数が高いほど高波数成分をより拡散することができるので、こちらを用いるほうが望ましい。

結局、(6.40)~(6.43) と (6.76) と (6.77) で示した長い時間間隔  $t$  で計算される項  $F_\phi^t$  は、この数値粘性項も含めて、

$$F_u^t = -[\text{Adv}.u]^t + \left[ \overline{\rho^* f_s \bar{v}^y} - \overline{\rho^* f_c \bar{w}^\zeta} \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}}\text{Turb}.u + G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.u \right]^{t-\Delta t} \quad (6.138)$$

$$F_v^t = -[\text{Adv}.v]^t - \left[ \overline{\rho^* f_s \bar{u}^x} \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}}\text{Turb}.v + G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.v \right]^{t-\Delta t} \quad (6.139)$$

$$F_w^t = -[\text{Adv}.w]^t + \left[ \overline{\rho^* (\text{Buoy}.\theta + \text{Buoy}.q)}^\zeta + \overline{\rho^* f_c \bar{u}^x} \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}}\text{Turb}.w + G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.w \right]^{t-\Delta t} \quad (6.140)$$

$$F_\theta^t = -[\text{Adv}.\theta]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}}\text{Turb}.\theta + G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.\theta \right]^{t-\Delta t} + [\rho^* \text{Src}.\theta]^t - \left[ \overline{\rho^\zeta w \partial_\zeta \theta} \right]^t \quad (6.141)$$

$$F_q^t = -[\text{Adv}.q_x]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}}\text{Turb}.q_x + G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.q_x \right]^{t-\Delta t} + [\rho^* \text{Src}.q_x]^t + [\rho^* \text{Fall}.q_x]^t \quad (6.142)$$

$$F_N^t = -\left[ \text{Adv}.\frac{N_x}{\rho^*} \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}}\text{Turb}.\frac{N_x}{\rho^*} + G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.\frac{N_x}{\rho^*} \right]^{t-\Delta t} + \left[ \rho^* \text{Src}.\frac{N_x}{\rho^*} \right]^t + \left[ \rho^* \text{Fall}.\frac{N_x}{\rho^*} \right]^t \quad (6.143)$$

$$F_E^t = -[\text{Adv}.E]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}}\text{Turb}.E + G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.E \right]^{t-\Delta t} \\ + [\text{Buoy}.E]^{t-\Delta t} + \left[ \rho^* \left( \frac{1}{2} \nu_E \text{Def}^2 - \frac{2}{3} E \text{Div} \right) \right]^{t-\Delta t} - \left[ \rho^* \left( \frac{C_e}{l_h} E^{\frac{3}{2}} \right) \right]^{t-\Delta t} \quad (6.144)$$

のように、また、(6.94) と (6.95) で示した、重力波モードを短い時間間隔で評価する場合の  $F_w^t, F_\theta^t$  は、

$$F_w^t = -[\text{Adv}.w]^t + \left[ \overline{\rho^* \text{Buoy}.q}^\zeta + \overline{\rho^* f_c \bar{u}^x} \right]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}}\text{Turb}.w + G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.w \right]^{t-\Delta t} \quad (6.145)$$

$$F_\theta^t = -[\text{Adv}.\theta]^t + \left[ G^{\frac{1}{2}}\text{Turb}.\theta + G^{\frac{1}{2}}\text{Diff}.\theta \right]^{t-\Delta t} + [\rho^* \text{Src}.\theta]^t \quad (6.146)$$

のように表わされる。

### 6.3 境界条件

前節までの基礎方程式の差分化でみたとおり、それらには  $i-1, i+1, j-1, \dots$  などの演算が含まれ、そのままでは各予報変数の端の添え字の格子点 ( $\phi$  は任意のスカラー量)、

$$\begin{aligned}
 u \text{ に対して;} & \quad i = 1, nx, \quad j = 1, ny - 1, \quad k = 1, nz - 1 \\
 v \text{ に対して;} & \quad i = 1, nx - 1, \quad j = 1, ny, \quad k = 1, nz - 1 \\
 w \text{ に対して;} & \quad i = 1, nx - 1, \quad j = 1, ny - 1, \quad k = 1, nz \\
 \phi \text{ に対して;} & \quad i = 1, nx - 1, \quad j = 1, ny - 1, \quad k = 1, nz - 1
 \end{aligned} \tag{6.147}$$

の値を求めることができない。よって、何らかの境界条件を与えて値を設定しなければならない。**CReSS** では、様々な境界条件を設定できるので次節よりそれらを説明する。なお、4 次精度の演算  $i+2, i-2, j-2, \dots$  による境界条件は、境界から 1 つ内側の格子点の精度を落とすことによって境界条件を設定しなくてもよいようにコーディングされている。

#### 6.3.1 側面境界条件

側面には、周期的、固定壁（鏡像条件）、勾配無し、放射の 4 つの境界条件を適用することができる。

##### 周期境界条件

周期境界条件とは、帯状の計算領域の東西もしくは南北を繋げて筒状にするもので、あたかも東西・南北の境界が無いような扱いをする条件であり、次のように与えられる。

東西方向に対して、

$$\begin{aligned}
 u_{1,j,k} &= u_{nx-2,j,k}, & u_{nx,j,k} &= u_{3,j,k} \\
 v_{1,j,k} &= v_{nx-2,j,k}, & v_{nx-1,j,k} &= v_{2,j,k} \\
 w_{1,j,k} &= w_{nx-2,j,k}, & w_{nx-1,j,k} &= w_{2,j,k} \\
 \phi_{1,j,k} &= \phi_{nx-2,j,k}, & \phi_{nx-1,j,k} &= \phi_{2,j,k} \\
 W_{1,j,k} &= W_{nx-2,j,k}, & W_{nx-1,j,k} &= W_{2,j,k}
 \end{aligned} \tag{6.148}$$

南北方向に対して、

$$\begin{aligned}
 u_{i,1,k} &= u_{i,ny-2,k}, & u_{i,ny-1,k} &= u_{i,2,k} \\
 v_{i,1,k} &= v_{i,ny-2,k}, & v_{i,ny,k} &= v_{i,3,k} \\
 w_{i,1,k} &= w_{i,ny-2,k}, & w_{i,ny-1,k} &= w_{i,2,k} \\
 \phi_{i,1,k} &= \phi_{i,ny-2,k}, & \phi_{i,ny-1,k} &= \phi_{i,2,k} \\
 W_{i,1,k} &= W_{i,ny-2,k}, & W_{i,ny-1,k} &= W_{i,2,k}
 \end{aligned} \tag{6.149}$$

ここで、 $\phi$  は任意のスカラー量である。

### 固定壁境界条件

固定壁境界条件とは、壁となる境界面において、例えば東西壁について示せば、非圧縮性の質量保存式の  $x$  微分と free-slip の条件、

$$\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) / \partial x = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (6.150)$$

から、 $x$  方向の速度成分  $u$  が、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \implies \quad u(x = -\Delta x, y, z) = u(x = \Delta x, y, z) \quad (6.151)$$

を満たすことが分かる。よって、境界条件は次のように与えられる。

東西方向に対して、

$$\begin{aligned} u_{1,j,k} &= -u_{3,j,k}, & u_{nx,j,k} &= -u_{nx-2,j,k} \\ v_{1,j,k} &= v_{2,j,k}, & v_{nx-1,j,k} &= v_{nx-2,j,k} \\ w_{1,j,k} &= w_{2,j,k}, & w_{nx-1,j,k} &= w_{nx-2,j,k} \\ \phi_{1,j,k} &= \phi_{2,j,k}, & \phi_{nx-1,j,k} &= \phi_{nx-2,j,k} \\ W_{1,j,k} &= W_{2,j,k}, & W_{nx-1,j,k} &= W_{nx-2,j,k} \end{aligned} \quad (6.152)$$

南北方向に対して、

$$\begin{aligned} u_{i,1,k} &= u_{i,2,k}, & u_{i,ny-1,k} &= u_{i,nx-2,k} \\ v_{i,1,k} &= -v_{i,3,k}, & v_{i,ny,k} &= -v_{i,nx-2,k} \\ w_{i,1,k} &= w_{i,2,k}, & w_{i,ny-1,k} &= w_{i,nx-2,k} \\ \phi_{i,1,k} &= \phi_{i,2,k}, & \phi_{i,ny-1,k} &= \phi_{i,nx-2,k} \\ W_{i,1,k} &= W_{i,2,k}, & W_{i,ny-1,k} &= W_{i,nx-2,k} \end{aligned} \quad (6.153)$$

ここで、 $\phi$  は任意のスカラー量である。

### 勾配無しの境界条件

勾配無しの境界条件とは、境界面における各予報変数の勾配が  $grad(\phi) = 0$  となるように、

東西方向に対して、

$$\begin{aligned} u_{1,j,k} &= u_{3,j,k}, & u_{nx,j,k} &= u_{nx-2,j,k} \\ v_{1,j,k} &= v_{2,j,k}, & v_{nx-1,j,k} &= v_{nx-2,j,k} \\ w_{1,j,k} &= w_{2,j,k}, & w_{nx-1,j,k} &= w_{nx-2,j,k} \\ \phi_{1,j,k} &= \phi_{2,j,k}, & \phi_{nx-1,j,k} &= \phi_{nx-2,j,k} \\ W_{1,j,k} &= W_{2,j,k}, & W_{nx-1,j,k} &= W_{nx-2,j,k} \end{aligned} \quad (6.154)$$

南北方向に対して、

$$\begin{aligned}
 u_{i,1,k} &= u_{i,2,k}, & u_{i,ny-1,k} &= u_{i,nx-2,k} \\
 v_{i,1,k} &= v_{i,3,k}, & v_{i,ny,k} &= v_{i,nx-2,k} \\
 w_{i,1,k} &= w_{i,2,k}, & w_{i,ny-1,k} &= w_{i,nx-2,k} \\
 \phi_{i,1,k} &= \phi_{i,2,k}, & \phi_{i,ny-1,k} &= \phi_{i,nx-2,k} \\
 W_{i,1,k} &= W_{i,2,k}, & W_{i,ny-1,k} &= W_{i,nx-2,k}
 \end{aligned} \tag{6.155}$$

と与えられる。ここで、 $\phi$  は任意のスカラー量である。

### 放射境界条件

放射境界条件とは、境界面で生じる不自然な解の挙動を抑えるために1次元の線型波動方程式、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{6.156}$$

を満たす放射条件が成り立つように境界値を設定するものである。ここでは、さらに減衰項を付加した、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\gamma \phi \tag{6.157}$$

を、また、客観解析値などの親となるモデルの出力を初期値・境界値に用いてネスティングする場合には、次のような各物理量の差の方程式に変更したものをを用いている。

$$\frac{\partial (\phi_f - \phi_c)}{\partial t} + c \frac{\partial (\phi_f - \phi_c)}{\partial x} = -\gamma (\phi_f - \phi_c) \tag{6.158}$$

なお、 $\phi$  は任意の物理量、下付き添え字  $f, c$  はそれぞれ親モデル・当該モデルの値を表わす。

さて、上記放射条件における位相速度  $c$  の求め方にはさまざまな方法があるが、**CReSS** では次の3つの方法が選択できる。なお、以下においては、 $\phi, \phi_f - \phi_c$  ともに  $\Phi$  で表わす。また、 $\Delta x$  は適宜  $\Delta y$  に読み替えるとよい。

#### (1) 位相速度を各点毎に算出する方法

この場合には、式 (6.157), (6.158) から右辺の減衰項を除いたものを、位相速度  $c$  について中心差分を用いて解いて、側面境界の各点に対して、

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta x} = -\frac{\Phi_b^{t+\Delta t} - \Phi_b^{t-\Delta t}}{2\Phi_{b-1}^t - \Phi_b^{t+\Delta t} - \Phi_b^{t-\Delta t}}, \quad -1 \leq C_b^t \leq 0, \text{ 西端または南端} \tag{6.159}$$

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta x} = -\frac{\Phi_b^{t+\Delta t} - \Phi_b^{t-\Delta t}}{\Phi_b^{t+\Delta t} + \Phi_b^{t-\Delta t} - 2\Phi_{b-1}^t}, \quad 0 \leq C_b^t \leq 1, \text{ 東端または北端} \tag{6.160}$$



のように無次元の位相速度を直接求める。これらの位相速度は、各予報変数に対してそれぞれ求めなければならない。

なお、実際の計算においては、次のように、1つ前のタイムステップの境界より1つ内側の格子点を基準に計算された値、

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta x} = -\frac{\Phi_{b-1}^t - \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t}}{2\Phi_{b-2}^{t-\Delta t} - \Phi_{b-1}^t - \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t}}, \quad -1 \leq C_b^t \leq 0, \text{ 西端または南端} \quad (6.161)$$

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta x} = -\frac{\Phi_{b-1}^t - \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t}}{\Phi_{b-1}^t + \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t} - 2\Phi_{b-2}^{t-\Delta t}}, \quad 0 \leq C_b^t \leq 1, \text{ 東端または北端} \quad (6.162)$$

を用いている。ここで、下付き添え字  $b$  は式 (6.147) で与えられる境界上の格子点を表わす。

## (2) 鉛直方向に一定の位相速度を算出する方法

この場合には、鉛直方向には一定の位相速度をもつとして波動方程式を、

$$\int_{z_{sfc}}^{z_{top}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dz + c \int_{z_{sfc}}^{z_{top}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz = -\gamma \Phi \quad (6.163)$$

のように考え、(1)と同様に、前のタイムステップにおける内側の格子点で計算された値を用いて、

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta x} = -\frac{\sum_{k=kmin}^{kmax} \{(\Phi_{b-1}^t - \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t}) \operatorname{sgn}(2\Phi_{b-2}^{t-\Delta t} - \Phi_{b-1}^t - \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t})\}}{\sum_{k=kmin}^{kmax} |2\Phi_{b-2}^{t-\Delta t} - \Phi_{b-1}^t - \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t}|}, \quad \dots \quad -1 \leq C_b^t \leq 0, \text{ 西端または南端} \quad (6.164)$$

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta x} = -\frac{\sum_{k=kmin}^{kmax} \{(\Phi_{b-1}^t - \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t}) \operatorname{sgn}(\Phi_{b-1}^t + \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t} - 2\Phi_{b-2}^{t-\Delta t})\}}{\sum_{k=kmin}^{kmax} |\Phi_{b-1}^t + \Phi_{b-1}^{t-2\Delta t} - 2\Phi_{b-2}^{t-\Delta t}|}, \quad \dots \quad 0 \leq C_b^t \leq 1, \text{ 東端または北端} \quad (6.165)$$

のように与えられる。ここでも、位相速度は各予報変数に対してそれぞれ求められなければならない。ここで、 $kmin$ ,  $kmax$  は、

$$u, v, \phi \text{ に対して; } kmin = 2, kmax = nz - 2 \quad (6.166)$$

$$w \text{ に対して; } kmin = 2, kmax = nz - 1 \quad (6.167)$$

である。

## (3) 一定の位相速度に移流速度を足す方法

この場合には、 $c^*$  を代表的な重力波の伝播速度（例えば  $30 \text{ m s}^{-1}$  程度）として与え、東西方向の境界には速度の  $x$  成分  $u$ 、南北方向には速度の  $y$  成分  $v$  を用いて、次のように与えられる。

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta x} = (u - c^*) \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad -1 \leq C_b^t \leq 0, \text{ 西端} \quad (6.168)$$

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta x} = (u + c^*) \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad 0 \leq C_b^t \leq 1, \text{ 東端} \quad (6.169)$$

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta y} = (v - c^*) \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad -1 \leq C_b^t \leq 0, \text{ 南端} \quad (6.170)$$

$$C_b^t = c_b^t \frac{\Delta t}{\Delta y} = (v + c^*) \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad 0 \leq C_b^t \leq 1, \text{ 北端} \quad (6.171)$$

なお、これは、壁面に垂直な速度成分（東西壁の  $u$  と南北壁の  $v$ ）以外の予報変数に適用される。壁面に垂直な速度成分についての位相速度は、(1) の場合を用いる。

## (4) 一定の位相速度を用いる方法

この場合には、常に領域外へ波が出て行くとして、(3) においての  $c^*$  のみを用いる。よって、側面全ての格子点で同じ値をとる（東・西、南・北で符号は異なる）。これは、壁面に垂直な速度成分以外の予報変数に適用され、壁面に垂直な速度成分についての位相速度は、(2) の場合を用いる。

最終的に、(1) ~ (4) で求められた位相速度を用いて、次のタイムステップの境界上の値は、

小さいタイムステップ  $\Delta\tau$  で積分される変数に対して、

$$\Phi_b^{\tau+\Delta\tau} = \Phi_b^\tau - \frac{C_b^t}{1 - C_b^t} (\Phi_{b-1}^t - \Phi_b^{t-\Delta t}) \frac{\Delta\tau}{\Delta t} - \gamma \Phi_b^{t-\Delta t} \Delta\tau, \quad \text{西端または南端} \quad (6.172)$$

$$\Phi_b^{\tau+\Delta\tau} = \Phi_b^\tau + \frac{C_b^t}{1 + C_b^t} (\Phi_{b-1}^t - \Phi_b^{t-\Delta t}) \frac{\Delta\tau}{\Delta t} - \gamma \Phi_b^{t-\Delta t} \Delta\tau, \quad \text{東端または北端} \quad (6.173)$$

大きいタイムステップ  $\Delta t$  で積分される変数に対して、

$$\Phi_b^{t+\Delta t} = \Phi_b^{t-\Delta t} - \frac{2C_b^t}{1 - C_b^t} (\Phi_{b-1}^t - \Phi_b^{t-\Delta t}) - \gamma \Phi_b^{t-\Delta t} \Delta t, \quad \text{西端または南端} \quad (6.174)$$

$$\Phi_b^{t+\Delta t} = \Phi_b^{t-\Delta t} + \frac{2C_b^t}{1 + C_b^t} (\Phi_{b-1}^t - \Phi_b^{t-\Delta t}) - \gamma \Phi_b^{t-\Delta t} \Delta t, \quad \text{東端または北端} \quad (6.175)$$

と与えられる。なお、減衰定数  $\gamma$  は時間の逆数の次元を持ち、その逆数  $1/\gamma$  は概ね 1 時間以上 12 時間以内が適切といわれている。

### 6.3.2 上・下面境界条件

上・下面には、固定壁（鏡像条件）、勾配無し<sup>2</sup>の2つの境界条件を適用することができる。

#### 固定壁境界条件

この場合、基本的には側面の場合と同様に考えればよいが、地形に沿う座標系であることから、

$$W = (uJ_{31} + vJ_{32} + w) / G^{\frac{1}{2}} \quad (6.176)$$

のようにデカルト座標系の速度と反変速度の関係が与えられるので、あくまで境界面において値が0となるのは反変鉛直速度  $W$  であることに注意して、

下境界面 ( $k = 2$ ) において、

$$W = 0, \quad w = -uJ_{31} - vJ_{32} \quad (6.177)$$

上境界面 ( $k = nz - 1$ ) において、

$$W = 0, \quad w = 0 \quad (6.178)$$

となる。よって境界条件は、

$$\begin{aligned} u_{i,j,1} &= u_{i,j,2}, & u_{i,j,nz-1} &= u_{i,j,nz-2} \\ v_{i,j,1} &= v_{i,j,2}, & v_{i,j,nz-1} &= v_{i,j,nz-2} \\ \phi_{i,j,1} &= \phi_{i,j,2}, & \phi_{i,j,nz-1} &= \phi_{i,j,nz-2} \\ W_{i,j,2} &= 0, \quad W_{i,j,1} &= -W_{i,j,3}, & W_{i,j,nz-1} &= 0, \quad W_{i,j,nz} &= -W_{i,j,nz-2} \end{aligned} \quad (6.179)$$

のように与えられる。ここで、 $\phi$  は任意のスカラー量である。鉛直速度  $w$  の上下面境界値は、式 (6.176) を用いて反変鉛直速度  $W$  を置き換えて、

下境界面 ( $k = 2$ ) において、

$$w_{i,j,2} = - \left( \overline{u^\zeta} J_{31}^x + \overline{v^\zeta} J_{32}^y \right)_{i,j,2} \quad (6.180)$$

$$w_{i,j,1} = - \left( \overline{u^\zeta} J_{31}^x + \overline{v^\zeta} J_{32}^y + W G^{\frac{1}{2}\zeta} \right)_{i,j,3} \quad (6.181)$$

上境界面 ( $k = nz - 1$ ) において、

$$w_{i,j,nz-1} = 0 \quad (6.182)$$

$$w_{i,j,nz} = - \left( \overline{u}^\zeta J_{31}^x + \overline{v}^\zeta J_{32}^y + W \overline{G}^{\frac{1}{2}\zeta} \right)_{i,j,nz-2} \quad (6.183)$$

と求められる。なお、下境界面の圧力偏差  $p'$  については外挿により、

$$p'_{i,j,1} = 2p'_{i,j,2} - p'_{i,j,3} \quad (6.184)$$

のように与える。

#### 勾配無しの境界条件

鉛直方向の勾配無しの境界条件も側面の場合と同様にして、

$$\begin{aligned} u_{i,j,1} &= u_{i,j,2}, & u_{i,j,nz-1} &= u_{i,j,nz-2} \\ v_{i,j,1} &= v_{i,j,2}, & v_{i,j,nz-1} &= v_{i,j,nz-2} \\ w_{i,j,1} &= w_{i,j,2}, & w_{i,j,nz} &= w_{i,j,nz-1} \\ \phi_{i,j,1} &= \phi_{i,j,2}, & \phi_{i,j,nz-1} &= \phi_{i,j,nz-2} \\ W_{i,j,1} &= W_{i,j,2}, & W_{i,j,nz} &= W_{i,j,nz-1} \end{aligned} \quad (6.185)$$

と与えられる。ここで、 $\phi$  は任意のスカラー量である。

#### 6.3.3 スポンジ層

**CRess** では、境界条件の他に任意の層厚のスポンジ層を設定することもできる。これは、境界面付近での波の反射を抑え吸収するための層で、次のように、基礎方程式の付加的な項として与えられる。

$$\frac{\partial(\rho^* \phi)}{\partial t} = -\text{Adv}.\phi + \dots - \gamma_h(x, y) \rho^* (\phi - \phi_e) - \gamma_v(z) \rho^* (\phi - \phi_e) \quad (6.186)$$

ここで、 $\phi$  は任意の予報変数、 $\phi_e$  は当該変数の客観解析値などの外部データの値、 $\gamma_h(x, y)$ 、 $\gamma_v(z)$  はそれぞれ水平方向には各境界面に向かって、鉛直方向には上境界面に向かって小さくなる減衰係数である。これらの減衰係数は、水平方向には吸収層の厚みを  $d$  とし西側側面を例にすれば、

$$\gamma_h = \begin{cases} \alpha_h \left(1 - \frac{x}{d}\right)^3, & x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases} \quad (6.187)$$

ように、鉛直方向には吸収層の最低高度を  $z_{low}$  とすれば、

$$\gamma_v = \begin{cases} 0, & z < z_{low} \\ \alpha_v \left\{ 1 - \cos \left( \pi \frac{z - z_{low}}{z_{top} - z_{low}} \right) \right\}, & z \geq z_{low} \end{cases} \quad (6.188)$$

のように与えられる。ここで、 $\alpha_h$ ,  $\alpha_v$  はそれぞれ水平・鉛直方向の減衰定数で時間の逆数の次元を持ち、それらの逆数  $1/\alpha_h$ ,  $1/\alpha_v$  は e-folding time と呼ばれる。これらの定数は、 $1/100 \sim 1/300 \text{ s}^{-1}$  程度の範囲で設定すればよい。また、吸収層の厚みは、水平方向には数格子分、鉛直方向には上面から  $1/3$  程度設定すればよい。

この項は1つ前のタイムステップ  $t - \Delta t$  で計算され、小さいタイムステップで扱われる予報変数に対しても、移流項や数値粘性項と同様に  $2\Delta t$  の大きなタイムステップ間の値として評価される。

なお、式 (6.186) においては、近づく値は外部の客観解析などの値  $\phi_e$  としたが、モデルが独立に実行される場合や予報変数に該当する客観解析データが無い場合には、変数によって異なるが、

$$\frac{\partial (\rho^* \phi)}{\partial t} = -\text{Adv.} \phi + \dots - \gamma_h(x, y) \rho^* (\phi - \phi_0) - \gamma_v(z) \rho^* (\phi - \phi_0) \quad (6.189)$$

$$\frac{\partial (\rho^* \phi)}{\partial t} = -\text{Adv.} \phi + \dots - \gamma_h(x, y) \rho^* (\phi - \bar{\phi}) - \gamma_v(z) \rho^* (\phi - \bar{\phi}) \quad (6.190)$$

のように、初期値  $\phi_0$  もしくは基準状態の値  $\bar{\phi}$  に近づけることもできる。